第５講　数Ⅱの微積

16　座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める．s，t は実数とし $t<0$ を満たすとする．点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする．

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　a を正の実数とする．放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ．

《12 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17 関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を l とし，C と l が O 以外に共有点をもつとする．C と l の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それらの共有点の 1 つが接点である場合は，O，P，Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

《13 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 以下の問いに答えよ.

(1) t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ.

(2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ.

《14 東大・文科》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする．

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ．

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ．

《10 東大・理科》

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　数Ⅱの微積

16　座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める．s，t は実数とし $t<0$ を満たすとする．点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする．

(1)　l_1，l_2 の方程式を求めよ．

(2)　a を正の実数とする．放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ を全て求めよ．

《12 東大・文科》

【答】 (1)　$y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t$

(2)
$$\begin{cases} a>\dfrac{2}{3} \text{ のとき } t=s^2+1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}} \text{ かつ } t<0 \\ 0<a\leqq\dfrac{2}{3} \text{ のとき面積が } a \text{ となる } (s,\ t) \text{ は存在しない.} \end{cases}$$

【解説】 (1)　点 $(s,\ t)$ から放物線 C に引いた接線は y 軸と平行になることはないので，傾きを m として $y=m(x-s)+t$ と表せる．

この直線が C と接するので
$$x^2+1=m(x-s)+t \iff x^2-mx+sm-t+1=0 \quad \cdots①$$
が重解をもつ．
$$(-m)^2-4(sm-t+1)=0 \qquad \therefore\ m^2-4sm+4t-4=0 \quad \cdots②$$
ここで $t<0$ なので $(-4s)^2-4(4t-4)=16(s^2-t+1)$ は正となるから，m に関する 2 次方程式②は異なる 2 つの実数解をもつので，小さい順に m_1，m_2 とすると
$m_1=2s-2\sqrt{s^2-t+1}$，$m_2=2s+2\sqrt{s^2-t+1}$ となる．

よって l_1 と l_2 の方程式は
$y=m_1(x-s)+t$ と $y=m_2(x-s)+t$　　$\therefore\ \boldsymbol{y=2(s\pm\sqrt{s^2-t+1})(x-s)+t}$.

(2)　②より①　$\iff$　$\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2=0$ となるので，$y=m_1(x-s)+t$ と C との接点の x 座標は $\dfrac{m_1}{2}$，$y=m_2(x-s)+t$ と C との接点の x 座標は $\dfrac{m_2}{2}$ であり $y=m_1(x-s)+t$ と $y=m_2(x-s)+t$ の交点の x 座標は $m_2(x-s)+t=m_1(x-s)+t$ より $x=s$ となる．

$\dfrac{m_1}{2}$ と $\dfrac{m_2}{2}$ を順に α，β とおくと C と l_1 と l_2 で囲まれる領域の面積は
$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^s\{(x^2+1)-(m_1(x-s)+t)\}dx+\int_s^\beta\{(x^2+1)-(m_2(x-s)+t)\}dx\\
&=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2dx\\
&=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^s+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_s^\beta\\
&=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3-\frac{1}{3}(s-\beta)^3=\frac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$
となる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで $t<0$, $s^2 \geqq 0$ より $s^2-t+1>1$ なので $\dfrac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}>\dfrac{2}{3}$.

よって $a>\dfrac{2}{3}$ のとき $\dfrac{2}{3}(s^2-t+1)^{\frac{3}{2}}=a \iff t=s^2+1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}$ かつ $t<0$

また $0<a \leqq \dfrac{2}{3}$ のとき囲まれる部分が a となることはない.

以上より求める軌跡は $\boldsymbol{t=s^2+1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}}$ **かつ** $\boldsymbol{t<0}$ $\quad \boldsymbol{\left(a>\dfrac{2}{3}\right)}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

17 関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点Oを通る傾き t の直線を l とし，C と l がO以外に共有点をもつとする．C と l の共有点をO，P，Qとし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく．ただし，それらの共有点の１つが接点である場合は，O，P，Qのうちの２つが一致して，その接点であるとする．関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ．

《13 東大・文科》

【答】 極小値 $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，0 $(t=3)$，極大値 $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

【解説】 l は $y=tx$ と表せるので，これと C の式を連立して

$$x(x-1)(x-3)=tx \iff x(x^2-4x+3-t)=0$$

ここで $x^2-4x+3-t=0$ は実数解をもつので $(-4)^2-4\cdot1\cdot(3-t)\geqq0$ $\therefore$ $t\geqq-1$ であり，その実数解を α，β とすると，解と係数の関係より $\alpha+\beta=4$，$\alpha\beta=3-t$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\alpha,\ t\alpha)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta,\ t\beta)$ と表せる．

このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\alpha|\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\beta|\sqrt{1+t^2}$ より

$g(t)=|\alpha\beta|(1+t^2)=|3-t|(1+t^2)$ となる．

よって $g(t)=\begin{cases}-(t-3)(t^2+1) & (-1\leqq t\leqq3\text{ のとき})\\(t-3)(t^2+1) & (t>3\text{ のとき})\end{cases}$

ここで，$f(t)=-(t-3)(t^2+1)$ とおくと，$f(t)=-t^3+3t^2-t+3$ より

$f'(t)=-3t^2+6t-1=-3\left(t-\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)\left(t-\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$ となることより，$g(t)$ の増減は

t	-1	$\cdots$	$\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗		↘		↗

ここで $f\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$，$f(3)=0$，$f\left(\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)=\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ より

極小値 $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，0$(t=3)$，極大値 $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}$ $\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 以下の問いに答えよ．

(1) t を実数の定数とする．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める．このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ．

(2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする．t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ．

《14 東大・文科》

【答】 (1) 最大値 t^3-9t^2+15t $(x=2t-3)$　　(2) 最小値 -25 $(t=5)$

【解説】 (1) $f(x)=-2(x-2t+3)^2+t^3-9t^2+15t$ より $f(x)$ は $\boldsymbol{x=2t-3}$ のとき最大値 $\boldsymbol{t^3-9t^2+15t}$ をとる．

(2) $g(t)=t^3-9t^2+15t$ であるので，$g'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$ より $g(t)$ の増減は

t	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗		↘		↗

となる．

ここで，$g(-1)=g(5)=-25$，$-1<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<1$ より，$t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ における $g(t)$ の最小値は $\boldsymbol{-25\ (t=5)}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　3辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の1辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする．

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ．

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ．

《10 東大・理科》

【答】 (1)　$\dfrac{\pi}{4}b(a^2+c^2)+abc$　　(2)　0より大きく $\dfrac{\pi}{27}$ 未満

【解説】 (1)　求める体積は，2辺の長さが b，$\sqrt{a^2+c^2}$ の長方形の長さ b の辺を軸に 90° 回転して得られる立体の体積 V_1 と，与えられた直方体の体積を加えたものなので

$$V_1=(\sqrt{a^2+c^2})^2\times\pi\times b\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}b(a^2+c^2)$$

より，求める体積は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}b(a^2+c^2)+abc}$.

(2)　$a+c=p$，$ac=q$ とおくと，a と c は $x^2-px+q=0$ の2つの正の実数解より

$$\begin{cases}(-p)^2-4q\geqq 0\\ a>0\\ c>0\end{cases}\iff\begin{cases}p^2-4q\geqq 0\\ a+c>0\\ ac>0\end{cases}\text{ より }\begin{cases}q\leqq\dfrac{1}{4}p^2 & \cdots①\\ p>0 & \cdots②\\ q>0 & \cdots③\end{cases}\text{ となる．}$$

ここで $a+b+c=1$ より $p+b=1$,これと $b>0$, ②より $b=1-p\ (0<p<1)$ となるので,

$$\frac{\pi}{4}b(a^2+c^2)+abc=\frac{\pi}{4}(1-p)(p^2-2q)+(1-p)q$$

この式を q の関数とみて $f(q)$ とおくと, $f(q)=\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-p)q+\dfrac{\pi}{4}(1-p)p^2$ であり,

①, ③より $0<q\leqq\dfrac{p^2}{4}$ であることと $\left(1-\dfrac{\pi}{2}\right)(1-p)<0$ より $f\left(\dfrac{p^2}{4}\right)\leqq f(q)<f(0)$ つまり

$\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)p^2(1-p)\leqq f(q)<\dfrac{\pi}{4}p^2(1-p)$ となる.

ここで $p^2(1-p)=g(p)$ とおくと $g'(p)=p(2-3p)$ と $0<p<1$ より $g(p)$ の増減は

p	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(p)$		$+$	0	$-$	
$g(p)$	0	↗	$\dfrac{4}{27}$	↘	0

となるので $0<g(p)\leqq\dfrac{4}{27}$ である.

よって $0<\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)p^2(1-p)\leqq\dfrac{1}{27}\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)$，$0<\dfrac{\pi}{4}p^2(1-p)\leqq\dfrac{\pi}{27}$ なので,

$0<f(q)<\dfrac{\pi}{27}$ となる.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ゆえに V の体積のとりうる範囲は **0 より大きく $\boldsymbol{\frac{\pi}{27}}$ 未満**.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。